



**Kommentarmaterial till
kursplanen i matematik**

Reviderad 2017

Skolverket

Kommentarmaterial till kursplanen i matematik

Reviderad 2017

Publikationen finns att ladda ner som
kostnadsfri PDF från Skolverkets webbplats:
skolverket.se/publikationer

ISBN: 978-91-7559-286-2
Grafisk produktion: Typoform AB

Innehåll

Inledning	4
Kommentarer till kursplanen i matematik	5
Syftet	5
Det centrala innehållet.....	11
Taluppfattning och tals användning	12
Algebra.....	15
Programmering	17
Geometri.....	17
Sannolikhet och statistik.....	21
Samband och förändring.....	23
Formulera och lösa problem	25
Kunskapskraven	27
Bilaga: Användningen av värdeord i kunskapskraven	31

Inledning

Till varje kursplan finns ett kommentarmaterial som riktar sig till lärare och rektorer. Avsikten med materialet är att ge en bredare och djupare förståelse för de urval och ställningstaganden som ligger bakom texterna i kursplanerna. Materialet beskriver också hur det centrala innehållet utvecklas över årskurserna och hur kunskapskraven är konstruerade. *Formuleringar som är hämtade direkt från kursplanen är genomgående kursiverade i texten.*

Kommentarer till kursplanen i matematik

SYFTET

Matematik är en av våra allra äldsta vetenskaper och genom historien har det gjorts många försök att förklara vad matematik är. Platon hävdade på sin tid att alla kända och okända matematiska objekt existerar i en parallell idévärld. Andra har istället menat att matematiken helt och hållet är konstruerad av människan utifrån olika praktiska behov. Som ett verktyg inom olika vetenskaper har matematiken en unik ställning och den har också ett estetiskt egenvärde. Att uppleva matematisk skönhet kan innebära att urskilja ett matematiskt mönster, eller att uppleva ett samband mellan till synes olika begrepp, utan att omedelbart fundera över om det kan användas praktiskt. Matematiken är således mångfacetterad genom att den förutom att vara ett nyttoverktyg också utgör ett språk, ett kulturarv, en konstform och en vetenskap.

Kursplanen i matematik tecknar bilden av ett kommunikativt ämne med fokus på användningen av matematik i olika sammanhang och situationer. Den lyfter fram matematik som en kreativ och problemlösande verksamhet och utgår från den tillfredsställelse och glädje som ligger i att förstå och kunna lösa problem. Genom undervisningen ges eleverna möjlighet att utveckla verktyg för att kunna beskriva och tolka situationer och förlopp samt formulera och lösa problem. I undervisningen får eleverna också möjlighet att värdera valda strategier och metoder för att kunna dra slutsatser av resultaten och fatta beslut. Undervisningen ska också ge eleverna möjligheter att utveckla kunskaper som gör det möjligt för dem att använda matematik som ett verktyg i vidare studier. Undervisningen i matematik lyfter också fram den tekniska utvecklingen där digitala verktyg och programmering får en allt större betydelse både för förståelse av matematik, men också för att utföra beräkningar, samla och analysera data samt för att undersöka problemställningar.

Intresse och tilltro

Kursplanens syftestext anger att undervisningen ska ge eleverna möjlighet att utveckla *intresse för matematik och tilltro till sin förmåga att använda matematik i olika sammanhang*.

Den som känner tilltro vågar pröva sig fram förutsättningslöst för att se vad som fungerar och inte fungerar. Det innebär att eleverna inte alltid behöver fokusera på ”rätt sätt” att lösa ett problem, utan att de ges möjlighet att utveckla en medvetenhet om att det ofta finns många olika sätt att komma fram till ett resultat på. Att känna tilltro innebär att våga växla mellan perspektiv, ta till nya metoder och kunna reflektera över vad man gör och vad resultatet blir, både enskilt och tillsammans med andra. Att våga reflektera över de begränsningar och möjligheter som ligger i olika lösningsmetoder och strategier genererar nya kunskaper hos eleverna och skapar i sin tur tilltro till det egna tänkandet.

Att vara intresserad underlättar således inläringen, vilket i sin tur leder till ett intresse för att söka nya kunskaper – på egen hand och tillsammans med andra. Den här utvecklingsspiralen är betydelsefull för elevernas samlade kunskapsutveckling i matematik.

Matematikens olika sammanhang

Det finns i hela kursplanen en genomgående ambition att lyfta fram att undervisningen ska bidra till en förståelse för hur matematiska kunskaper kan användas i olika situationer och sammanhang. Det syns i formuleringar som att eleverna ska utveckla kunskaper om *matematikens användning i vardagen och inom olika ämnesområden* samt att de ska utveckla *sin förmåga att använda matematik i olika sammanhang*.

Vi använder oss av matematik dagligen, till exempel när vi läser busstidtabeller, överväger om det går fortare att gå än att åka buss för att komma i tid till ett möte, när vi ska teckna nya el- och telefonabonnemang eller ta ett lån. Matematiken ska kunna användas i olika situationer. Därför är det viktigt att ha möjlighet att ställa sig frågan hur man kan använda sig av matematik i specifika situationer. Situationen styr valet av strategier, begrepp och metoder samt valet av hur det matematiska innehållet ska kommuniceras. Förutsättningen för att kunna göra relevanta val av strategier, begrepp och metoder är att man har utvecklat kunskaper i och tränat på att använda dessa i bekanta och obekanta situationer.

Kursplanens skrivningar om vardagliga situationer är inte preciserade. Situationerna kan se olika ut beroende på vad eleverna möter i andra ämnen eller beroende på var man bor, hur närsamhället ser ut eller vilka händelser som är aktuella. Vad som är vardagliga situationer varierar också utifrån elevernas ålder och erfarenheter.

Genom att eleverna ges möjlighet att tillämpa matematik inom olika ämnesområden och på rent inommatematiska områden kan de utveckla en tilltro till att använda matematik i många olika situationer och sammanhang. Det ger dem större möjligheter att ta ställning och fatta välgrundade beslut i aktuella frågor där matematiska kunskaper är nödvändiga.

Estetiska värden

Genom att utveckla kunskaper i och om matematik får eleverna också förutsättningar att närma sig ett annat av kursplanens syften nämligen möjligheten *att uppleva estetiska värden i möten med matematiska mönster, former och samband*. Detta kan till exempel handla om att uppleva geometriska objekt och deras uppbyggnad, konstruktioner av perspektiv eller av algebraiska uttryck som på ett enkelt sätt uttrycker generella lösningar eller insikter om matematiska relationer. Det finns ett egenvärde i att uppleva estetiska värden och att lösa matematiska problem för att de i sig är stimulerande och för att problemen och lösningarna äger en egen skönhet.

Formulera och lösa problem

Ett syfte med undervisningen i matematik är att den ska bidra till att eleverna utvecklar kunskaper för att *kunna formulera och lösa problem*. Kursplanen har en tydlig inriktning mot problemlösning då det är centralt i matematisk verksamhet. Ett av de långsiktiga målen i kursplanen anger också att eleverna ska utveckla förmågan *att formulera och lösa problem med hjälp av matematik samt värdera valda strategier och metoder*. Problemlösning återfinns likaså som ett kunskapsområde i det centrala innehållet.

Problemlösning omfattar många delar av matematiken, såsom att använda matematiska begrepp, metoder och uttrycksformer liksom att kunna resonera matematiskt. Det omfattar också att kunna reflektera över och värdera rimligheten i resultatet i relation till problemet. Att utveckla kunskaper om problemlösning handlar till stor del om att se att alternativa lösningar också kan vara en väg till resultatet.

Matematiska problem är, till skillnad från rena rutinuppgifter, situationer eller uppgifter där eleverna inte direkt känner till hur problemet ska lösas. I arbetet med matematiska problem måste eleverna i stället undersöka och pröva sig fram för att finna en lösning. Problem kan ha kopplingar till olika matematiska kunskapsområden och kan ta sin utgångspunkt i egna intressen, fantasier eller verkliga situationer. Ibland förekommer ett problem i en specifik situation som gör att eleverna behöver tolka och göra en matematisk formulering av situationen. Problemen kan också vara rent matematiska och sakna direkt samband med vardagen.

Ett matematiskt problem kan betraktas som en relation mellan eleven och problemsituationen. Det är en relation som kan se olika ut, beroende på hur långt eleven har kommit i sin kunskapsutveckling. En elev som har kommit långt i sin kunskapsutveckling kan uppleva en uppgift som en rutinuppgift om hon eller han känner till en lösningsmetod. En annan elev kan i mötet med samma uppgift däremot behöva undersöka och pröva sig fram till en lösning.

Undervisningen i matematik ska syfta till att eleverna utvecklar en förtrogenhet med problemlösningens alla delar. De ska utveckla kunskaper i att *tolka vardagliga och matematiska situationer* och vidare kunna *beskriva och formulera dessa med hjälp av matematikens uttrycksformer*. Det här innebär att kunna tillägna sig det matematiska innehållet i en vardaglig eller matematisk problemsituation, uttyda innehållet och därefter utforma en matematisk frågeställning med hjälp av matematiska uttrycksformer eller i form av algoritmer. Det kan också innebära att formulera en enkel matematisk modell, som är en generell beskrivning av en verklig situation. En algoritm är inom matematik och datavetenskap en begränsad uppsättning väldefinierade instruktioner för att lösa en uppgift. Den kan också beskrivas som en systematisk procedur för hur man genom ett begränsat antal steg utför en beräkning eller löser ett problem. Problemlösning innefattar också att kunna utvärdera matematiska modellers egenskaper, begränsningar och giltighet i förhållande till problemsituationen samt att utveckla tillräckliga kunskaper för att *reflektera över och värdera valda strategier, metoder, modeller och resultat*. När programmering används för matematisk problemlösning ska eleverna också ges möjlighet att skapa, testa och förbättra algoritmer.

Matematiska begrepp och metoder

Begreppsförståelsen har en central roll för elevernas förståelse av matematik och deras fortsatta utveckling av kunskaper i ämnet. Att kunna välja och använda lämpliga matematiska metoder samt att behärska procedurer och rutinuppgifter är också av central betydelse för elevernas förståelse och fortsatta kunskapsutveckling i matematik.

I kursplanens syfte anges därför tydligt att eleverna ska ges förutsättningar att utveckla en förtrogenhet med *grundläggande matematiska begrepp och metoder och deras användbarhet*. Förtrogenhet utvecklas med erfarenhet. I undervisningen behöver

därför eleverna ges rika erfarenheter av begrepp och metoder utifrån olika situationer och sammanhang.

Eleverna ska genom undervisningen ges möjlighet att utveckla förmågan att kunna *använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp*. Detta omfattar dels kunskap om matematiska begrepp och deras samband med varandra, dels att kunna använda sig av och tillämpa begreppen och sambanden. Genom att använda olika uttrycksformer kan elevernas förståelse av matematiska begrepp fördjupas. Det kan till exempel innebära att utveckla förståelse för att en fotbollsplan kan uttryckas som en rektangel eller att fem klossar kan representeras av talet 5. Det kan också innebära att med hjälp av konkret material, bilder, symboler, grafer eller formler kunna beskriva begrepp som cirkel eller exponentiell tillväxt.

Ytterligare en viktig aspekt av förståelsen för matematiska begrepp är att kunna beskriva likheter och skillnader mellan olika begrepp, till exempel mellan begreppen medelvärde och median. Det är också viktigt att kunna se och förstå relationerna och sambanden mellan olika begrepp, till exempel mellan omkrets och area, addition och multiplikation eller mellan cirkel och area.

Eleverna ska genom undervisningen ges förutsättningar att utveckla förmågan att kunna *välja och använda lämpliga matematiska metoder för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter*. Förmågan, som finns i ett av de långsiktiga målen i kursplanen, omfattar att kunna identifiera vilken metod som lämpar sig bäst i den enskilda situationen och därefter kunna genomföra denna på ett mer eller mindre effektivt sätt. Förmågan innefattar bland annat huvudräkning, skriftliga beräkningar och beräkningar med hjälp av miniräknare eller annan digital teknik. Förmågan omfattar även rutinartade procedurer som att göra mätningar eller konstruera tabeller och koordinat-system.

Genom att eleverna lär sig att behärska metoderna väl, blir det möjligt för dem att utföra avancerade matematiska operationer med begränsad tankemässig insats. Det innebär att de kan koncentrera sig på problemlösning i stället för att lägga ned sin kraft på att genomföra beräkningarna. Man kan uttrycka det som att goda kunskaper om metoder gör en del av det matematiska arbetet åt oss, så att vi bättre kan koncentrera oss på att hantera svårare problem.

Digitala verktyg och programmering i matematik

Kursplanen anger att eleverna genom undervisningen ska *ges möjligheter att utveckla kunskaper i att använda digitala verktyg och programmering för att kunna undersöka problemställningar och matematiska begrepp, göra beräkningar och för att presentera och tolka data*. Många elever har praktisk erfarenhet av att använda digitala verktyg, både i skolan och på fritiden. Eleverna ska ges möjlighet att utveckla förståelse för digitaliseringens påverkan på samhället, att algoritmer och programmering används inom många områden och yrken samt att utveckla ett kritiskt och ansvarsfullt förhållningssätt till digital teknik. Eleverna ska också ges möjlighet att utveckla kunskaper om hur människan med hjälp av digital teknik och programmering kan påverka såväl skeden som samhällsdebatt. Tillsammans med kunskaper på systemnivå i ämnet teknik

utgör detta innehåll de grundläggande kunskaperna för att förstå hur digital teknik kan användas.

Digitala verktyg i form av bland annat miniräknare, grafräknare och datorer med allt mer avancerad programvara samt digital teknik och programmering erbjuder möjligheter att tillämpa matematik och att experimentera med matematik och på så sätt utveckla förståelse för matematik. Det kan handla om allt från att göra enkla tabeller till att utföra avancerade och omfattande beräkningar, hantera stora mängder data eller ta fram prognoser med hjälp av matematiska modeller. Det kan också handla om att undersöka och dra slutsatser om geometriska begrepp, olika sannolikhets-situationer eller situationer där statistik används. Digital teknik kan underlätta lärande i matematik genom att den hjälper till att visualisera och konkretisera abstrakta fenomen. Till exempel kan tekniken ge eleverna en möjlighet att möta ett geometriskt objekt som visualiseras två- och tredimensionellt i en datorsimulering. Genom att eleverna möter användningen av digital teknik redan i grundskolan läggs en grund för deras vidare lärande. Mötet med tekniken kan också stärka deras tillit till sin förmåga att använda teknik i olika sammanhang.

Eleverna behöver också utveckla förmågan att reflektera över de möjligheter och begränsningar som användningen av tekniken ger. Digital teknik underlättar hanteringen av stora mängder data och möjliggör avancerade beräkningar, men det är också viktigt att vara medveten om de begränsningar som finns i konstruktioner och modeller som används, oavsett om de är digitala eller ej. Därför behöver eleverna utveckla förmågan att reflektera kritiskt över resultaten av beräkningar, till exempel över prognoser eller statistik. När eleverna konstruerar algoritmer som används vid programmering behöver de också reflektera kritiskt över resultaten. Det är en process där eleverna behöver testa och sedan gå tillbaka och förbättra sina algoritmer och program. Den tekniska utvecklingen i samhället går fort. Den som har utvecklat goda kunskaper i hur digital teknik kan användas i matematiska sammanhang har större förutsättningar att ta till sig även framtidens teknik.

Kommunicera och föra resonemang

Ett syfte med undervisningen i matematik är att eleverna ska utveckla förmågan att kommunicera med och om matematik. Kursplanen anger att eleverna ska ges möjlighet att *argumentera logiskt och föra matematiska resonemang* samt utveckla *en förtrogenhet med matematikens uttrycksformer och hur dessa kan användas för att kommunicera om matematik*. Två av de förmågor som finns i de långsiktiga målen i kursplanen handlar också om att eleverna ska utveckla kommunikativa förmågor i matematik.

Att kommunicera innebär i sammanhanget att utbyta information med andra om matematiska idéer och tankegångar, muntligt, skriftligt och med hjälp av olika uttrycksformer. I undervisningen får eleverna möjlighet att utveckla ett alltmer precist matematiskt språk, för att därigenom kunna anpassa sina samtal och redogörelser till olika mottagare eller ändamål. Först när eleverna har utvecklat förmågan att kommunicera matematik kan matematiken utvecklas till ett funktionellt verktyg i olika sammanhang.

Lika viktigt som att själv kunna kommunicera matematik är det att kunna lyssna till och ta del av andras beskrivningar, förklaringar och argument. Undervisningen syftar därför även till att eleverna ska kunna tillägna sig och förstå det matematiska innehållet i situationer där matematiska begrepp och uttrycksformer används.

Ytterligare en viktig aspekt av att kommunicera matematik är att kunna växla mellan olika uttrycksformer. Det kan till exempel innebära att kunna skriva talet åtta med symbolen 8 och visa det med åtta klossar, eller att med hjälp av en formel, en tabell eller en graf beskriva med vilken hastighet ett radioaktivt ämne sönderfaller. Genom att kommunicera ett matematiskt innehåll med olika uttrycksformer utvidgar och utvecklar eleverna begreppsförståelsen samt utvecklar förmågan att generalisera, analysera och dra slutsatser.

En ytterligare aspekt av matematikens kommunikativa karaktär är att kunna föra resonemang. En del av att kunna föra ett resonemang innebär att utveckla en förståelse för att matematiska samband är konstruerade, och att de därför också kan ”återupptäckas” genom att man resonerar sig fram. När eleverna får möjlighet att föra matematiska resonemang kan de resonera sig fram till olika lösningar med hjälp av både informella och formella matematiska argument. Då kan de lättare motivera olika val och slutsatser i nya situationer, till exempel val av räknesätt, med hjälp av resonemang som sker på matematiska grunder.

Den mest strikta formen av resonemang kan sägas vara bevis, men renodlad bevisföring ingår inte i kursplanen. I de senare årskurserna möter eleverna däremot grunderna för bevisföring i det centrala innehållet.

Historiska sammanhang och matematikens relevans

I alla tider har människan försökt beskriva verkligheten och förklara olika slags fenomen genom att använda matematik. Matematiken har utvecklats parallellt med samhället och beroende på vilka behov som har funnits i samhället har uttrycken varit olika. Kursplanen anger att undervisningen i matematik ska ge eleverna förutsättningar att *utveckla kunskaper om historiska sammanhang där viktiga begrepp och metoder i matematiken har utvecklats.*

Det finns många historiska exempel på sammanhang där matematiska kunskaper har varit avgörande, till exempel vid konstruktion av byggnader, inom naturvetenskap, måleri och konst. Genom att urskilja hur matematiska begrepp och metoder har vuxit fram i den här typen av sammanhang blir det möjligt för eleverna att utveckla en djupare förståelse av begreppen och metoderna.

Matematiken utvecklas fortfarande och forskningen tillför ständigt ny kunskap. Även i dag är tillämpningar av matematik en förutsättning för utvecklingen inom många olika samhällsområden. Matematik är till exempel ett oundgängligt verktyg när det gäller att ta fram ekonomiska prognoser eller utveckla avancerade kommunikationssystem såsom internet eller nya höghastighetsbanor för tåg. Ett syfte med undervisningen är därför att eleverna ska ges förutsättningar se *matematikens sammanhang och relevans.* För att det ska bli möjligt anger kursplanen att eleverna ska ges förutsättningar att *reflektera över matematikens betydelse, användning och begränsning i vardagslivet, i andra skolämnen och under historiska skeenden.*

De långsiktiga målen

Kursplanens syftestext avslutas med ett antal långsiktiga mål. De är formulerade som förmågor som undervisningen ska ge eleverna förutsättningar att utveckla. Förmågorna ligger till grund för kunskapskraven i ämnet och kommenteras därför även längre fram i avsnittet ”Kunskapskraven”.

DET CENTRALA INNEHÅLLET

Det centrala innehållet i kursplanen anger vilket obligatoriskt innehåll som ska behandlas i undervisningen. Innehållet är indelat i kunskapsområden som tillsammans ringar in centrala delar av ämnet. Kunskapsområdena bör inte ses som separata arbetsområden för undervisningen, utan de kan kombineras på de sätt som läraren bedömer som mest lämpliga för att uppnå syftet med undervisningen.

Varje kunskapsområde består av ett antal punkter. Dessa ska inte uppfattas som att de alltid ska väga lika tungt i undervisningen. Innehållspunkterna ska snarare uppfattas som byggstenar som kan kombineras på olika sätt. Det centrala innehållet är strukturerat så att det visar på en progression. Det innebär att innehållet vidgas och fördjupas upp genom årskurserna.

Innehållet i matematik

Det centrala innehållet i ämnet matematik är indelat i sex olika kunskapsområden: ”Taluppfattning och tals användning”, ”Algebra”, ”Geometri”, ”Sannolikhet och statistik”, ”Samband och förändring” samt ”Problemlösning”. Samtliga återfinns i alla årskurserna. Kunskapsområdena följer en för ämnet traditionell indelning. De kan läsas var för sig, samtidigt som de förutsätter och går in varandra. Till exempel behöver man ha kunskaper om tal och tals användning för att göra mätningar inom geometri. Vid undervisning inom ett arbetsområde använder man ofta innehållspunkter från flera olika kunskapsområden i det centrala innehållet. Kunskapsområdet ”Problemlösning” har en särställning då innehållet där ska tillämpas på alla andra kunskapsområden.

En av kursplanens främsta ambitioner är att betona vikten av matematik som ett funktionellt redskap i olika sammanhang. I kursplanens centrala innehåll uttrycks sammanhangen som situationer från vardagen, matematiken eller andra ämnesområden där matematiskt kunnande används.

Progressionen

En grundläggande tanke bakom progressionen i matematik är att undervisningen i de yngre åren utgår från ett prövande förhållningsätt. Att pröva sig fram med hjälp av olika uttrycksformer i skilda sammanhang ger eleverna kunskap om vilka begrepp och metoder som är tillämpbara och utvecklingsbara. Efter hand, i de högre årskurserna ska eleverna möta mer formaliserade metoder. En annan grundläggande tanke är att innehållet utgår från konkreta och elevnära situationer och successivt utvidgas till obekanta situationer i vardagen och inom andra ämnesområden. Därigenom får eleverna verktyg att uttrycka sig mer matematiskt.

Exempel i innehållet

Under rubriken Centralt innehåll förekommer vissa exempel. De förtydligar innehållet, men är inte uttryck för att de bör prioriteras framför andra alternativ. Till exempel anges i årskurserna 4–6 att eleverna ska möta innehållet *talsystem som använts i några kulturer genom historien, till exempel den babyloniska*. Det innebär att talsystem som använts i några kulturer genom historien är obligatoriskt innehåll under årskurserna 4–6. Men likaväl som att möta talsystem i den babyloniska kulturen kan eleverna möta talsystem från mayakulturen, eller någon helt annan kultur.

Taluppfattning och tals användning

Innehållet i kunskapsområdet ”Taluppfattning och tals användning” omfattar kunskaper om tal och hantering av tal, beräkningsmetoder samt hur dessa kunskaper kan användas i matematiska och vardagliga sammanhang. Taluppfattning, som handlar om förståelse för tals betydelse, relationer och storlek, är grundläggande för att kunna utveckla kunskaper i matematik. Genom att eleverna successivt får möta tal och beräkningar av tal i ett utvidgat talområde, fördjupas deras förståelse och uppfattning av tal och olika räknesätt.

Naturliga, rationella och reella tal

I årskurserna 1–3 är *naturliga tal och deras egenskaper samt hur talen kan delas upp och hur de kan användas för att ange antal och ordning* ett centralt innehåll. Här ska eleverna få möta tal som de kan utforska för att på så sätt utveckla förståelse för talen och deras relationer till varandra. I de lägre årskurserna finns även innehållet *naturliga tal och enkla tal i bråkform och deras användning i vardagliga situationer*. Eleverna har ofta erfarenheter av den här typen av tal från sin vardag, till exempel vid matlagning efter recept, som undervisningen kan utgå från.

I årskurserna 4–6 ska undervisningen behandla *rationella tal och deras egenskaper samt tal i bråk- och decimalform och deras användning i vardagliga situationer*. När eleverna får möta dessa tal i olika situationer, till exempel vid inköp eller när de mäter sträckor, ökar deras förståelse inte bara för talen och deras relationer, utan också för hur man kan tillämpa matematik i vardagen. I årskurserna 7–9 vidgas talområdet ytterligare till *reella tal och deras egenskaper samt deras användning i vardagliga och matematiska situationer*.

För de högre årskurserna finns även innehållet *talsystemets utveckling från naturliga tal till reella tal*. Som en illustration till hur talområdet utökas kan man tänka sig en tallinje med naturliga tal som ger ett glegt intryck. När man sedan för in rationella tal, till exempel negativa tal och tal i bråkform, fylls tallinjen successivt på. I och med att de reella talen införs kommer tallinjen att vara helt fylld.

De rationella och reella talen brukar ofta intressera barn i de lägre årskurserna. Det är därför upp till läraren att avgöra om dessa ska ingå även i de yngre elevernas utforskningar av tal.

Positionssystemet och historisk utveckling

För att eleverna ska kunna utveckla förståelse för positionssystemet krävs att de förstår att en siffras värde är beroende av vilken plats den har i det skrivna talet.

I förlängningen innebär detta en insikt om att man kan skriva hur stora och små tal som helst med siffersymboler. Kunskaper om tal och talsystems olika uppbyggnad innebär också kunskaper om talet 0 och nollans funktion.

När det gäller positionssystemet går progressionen från att eleverna i de lägre åldrarna ska få undervisning om *hur positionssystemet kan användas för att beskriva naturliga tal*, till att de i årskurserna 4–6 ska möta *positionssystemet för tal i decimalform*.

I samband med positionssystemet ska eleverna även få undervisning om hur olika talsystem har byggts upp och utvecklats genom historien. I de lägre årskurserna är det formulerat som *symboler för tal och symbolernas utveckling i några olika kulturer genom historien*. Här ska eleverna ges möjlighet att utveckla kunskaper om hur man under olika tider har representerat tal på skilda sätt och hur man har använt olika föremål eller tecken för att representera ental, tiotal, hundratal och tusental innan nollan infördes. Genom kunskaper om den historiska utvecklingen av tals representationer, och genom att själva arbeta med olika representationsformer, kan eleverna förstå hur det decimala positionssystemet har kommit till, hur det är uppbyggt och hur det används.

För årskurserna 4–6 finns även innehållet *det binära talsystemet och hur det kan tillämpas i digital teknik, samt talsystem som använts i några kulturer genom historien*. Det binära talsystemet är centralt i dag eftersom det används för digital information i till exempel datorer. Det är därför viktigt att eleverna tidigt får möta detta och andra talsystem som inte bygger på basen tio. I årskurserna 7–9 ska eleverna även få kunskaper om *metoder för beräkningar som använts i olika historiska och kulturella sammanhang*. Det kan till exempel vara kulramen eller olika metoder för division. Här finns stora möjligheter att se mångfalden i de metoder som har använts genom historien. Här ges också möjligheter för eleverna att ta del av och dela med sig av olika kulturers sätt att skriva tal, beskriva talsystem och metoder för beräkningar.

Att uttrycka och använda tal

För att kunna beskriva ett matematiskt innehåll behöver man ha förståelse för att tal kan uttryckas med olika representationsformer, till exempel med hjälp av konkret material, bilder och symboler för tal. I förståelsen för tal ingår även att kunna växla mellan olika representationsformer.

I årskurserna 1–3 ska eleverna möta innehållet *del av helhet och del av antal. Hur delarna kan benämnas och uttryckas som enkla bråk samt hur enkla bråk förhåller sig till naturliga tal*. Innehållet handlar om hur man kan uttrycka tal på olika sätt, men också om tal i bråkform, deras relation till varandra och till naturliga tal. Här läggs grunden för elevernas förståelse av begreppen del av helhet och del av antal, vilket är en förutsättning för att de ska kunna utveckla kunskaper i algebra och om procentbegreppet.

Det är viktigt att eleverna förstår sambandet mellan tal i procent-, decimal- och bråkform. Därför vidgas innehållet i årskurserna 4–6 till *tal i bråk- och decimalform* och *tal i procentform och deras samband med tal i bråk- och decimalform*. Innehållet är grundläggande för att eleverna ska kunna utveckla kunskaper om och genomföra beräkningar med procent. Tal i procentform berörs i det här kunskapsområdet, medan procentbegreppet och dess användning återfinns i kunskapsområdet ”Samband och förändring”.

Undervisningen i årskurserna 7–9 ska även behandla *tal i potensform* samt *grundpotensform för att uttrycka små och stora tal samt användning av prefix*. Prefix som milli, hekto och kilo har oförändrad aktualitet, medan prefix som nano, mega och giga används mer i dag än för tjugo år sedan som en följd av den tekniska utvecklingen i samhället.

De fyra räknesätten och metoder för beräkningar

Aritmetiken är den del av matematiken som handlar om beräkningar. För att kunna göra effektiva beräkningar behöver eleverna förståelse för de *fyra räknesättens egenskaper och samband samt användning i olika situationer* (årskurserna 1–3). Det innebär att eleverna ska få kunskaper om hur räknesätten förhåller sig till varandra och förståelse för vilka räknesätt som är mest effektiva i olika situationer.

För att kunna välja och använda lämplig metod för situationen behöver de yngre eleverna också kunskaper om *centrala metoder för beräkningar med naturliga tal, vid huvudräkning och överslagsräkning samt vid beräkningar med skriftliga metoder och med digitala verktyg* samt *metodernas användning i olika situationer* (årskurserna 1–3). Med centrala metoder avser kursplanen utvecklingsbara metoder, det vill säga metoder som är effektiva i den givna situationen, men samtidigt så generella att de är användbara i nya situationer.

I årskurserna 4–6 ska eleverna möta *centrala metoder för beräkningar med naturliga tal och enkla tal i decimalform vid överslagsräkning, huvudräkning samt vid beräkningar med skriftliga metoder och med digitala verktyg. Metodernas användning i olika situationer*. I årskurserna 7–9 är innehållet *centrala metoder för beräkningar med tal i bråk- och decimalform vid överslagsräkning, huvudräkning samt vid beräkning med skriftliga metoder och digital teknik*. Progressionen ligger i att eleverna i de lägre årskurserna får möta och tillämpa några centrala metoder inom ett begränsat talområde, för att sedan i de högre årskurserna använda dem i ett utvidgat talområde. Vidare handlar progressionen om att ju äldre eleverna blir, desto fler metoder ska de möta. Även kunskaperna om när olika metoder är lämpliga att använda utvidgas och fördjupas.

Rimlighetsbedömning

Att kunna göra en rimlighetsbedömning är väsentligt för att utveckla en känsla för resultatet vid beräkningar och uppskattningar, både i vardagliga och matematiska situationer. Rimlighetsbedömningen startar tidigt genom att de yngre eleverna får möta innehållet *rimlighetsbedömning vid enkla beräkningar och uppskattningar*. I årskurserna 4–6 är innehållet *rimlighetsbedömningar vid uppskattningar och beräkningar i vardagliga situationer* och i årskurserna 7–9 ska undervisningen behandla *rimlighetsbedömning vid uppskattningar och beräkningar i vardagliga och matematiska situationer och inom andra ämnesområden*.

Progressionen tar sin utgångspunkt i att eleverna i de yngre årskurserna reflekterar över rimligheter i enkla och elevnära situationer. Det kan till exempel vara att bedöma rimligheten i en överslagsberäkning av hur lång tid det tar att gå till skolan, eller att ta ställning till om det är rimligt att 19 minus 6 är lika med 2. Med stigande ålder omfattar rimlighetsbedömningarna beräkningar och uppskattningar i allt vidare sammanhang. Eftersom rimlighetsbedömningar är centrala när det gäller matematiska

resonemang ligger det även en progression i att eleverna i de högre årskurserna ska använda rimlighetsbedömningar för att argumentera vid olika matematiska resonemang på ett allt mer systematiskt och precist sätt.

Algebra

I det här kunskapsområdet lyfter kursplanen fram grundläggande algebraisk kunskap. Enkelt uttryckt kan algebraisk kunskap beskrivas som att man genom att använda bokstavsbeteckningar i stället för tal, kan uttrycka beräkningar på ett generellt sätt. I kunskapsområdet ingår kunskaper om likhetstecknets innebörd, bokstavsbeteckningar och variabelbegreppet. Tillsammans med kunskaper i aritmetik är detta viktiga byggstenar inom det algebraiska området. De ligger till grund för elevernas förståelse av ekvationer, algebraiska uttryck, funktioner, formler och grafer.

Eleverna behöver kunskapen i och om algebra för att kunna föra generella resonemang vid problemlösning. Algebraiska kunskaper är också nödvändiga för att kunna använda matematiska modeller i senare årskurser och i fortsatta studier. Algebraiska uttryck och ekvationer har stor betydelse inom kunskapsområdet "Geometri" när man för resonemang om geometriska relationer, satser och formler. Kunskaper om algebra och ekvationer är även centralt inom kunskapsområdet "Samband och förändring" för att till exempel utveckla kunskaper om funktioner.

I området algebra ingår grunderna inom programmering som innebär att eleverna ges möjlighet att utveckla ett förhållningssätt till och kunskaper om programmering. Tillsammans med kunskaper om tekniska system i ämnet teknik och hur programmering kan påverka individ och samhällsutveckling i samhällskunskap utgör detta innehåll de grundläggande kunskaperna för att förstå hur människan med programmering kan påverka skeenden och samhällsdebatt.

Likhetstecknets innebörd och variabelbegreppet

Matematikdidaktisk forskning visar att det är viktigt att eleverna tidigt får möta och utveckla kunskaper i algebra. Kursplanen lyfter därför fram grundläggande algebraiska kunskaper även för de yngsta eleverna med innehållet *matematiska likheter och likhetstecknets betydelse*. När eleverna i årskurserna 1–3 arbetar med matematiska likheter och likhetstecknets betydelse och efter hand förstår att ett tomrum i en matematisk likhet kan ersättas med en bokstav, utvecklar de förförståelse för obekanta tal och variabelbegreppet. Därigenom läggs en grund för innehållet *obekanta tal och deras egenskaper samt situationer där det finns behov av att beteckna ett obekant tal med en symbol* i årskurserna 4–6.

För att eleverna ska kunna utveckla kunskaper om obekanta tal är det viktigt att de får möjlighet att möta och tillämpa begreppet i olika situationer, både i kända och okända sammanhang. Det kan till exempel betyda att de får prova sig fram att beteckna obekanta tal vid problemlösning.

I årskurserna 7–9 ska undervisningen behandla *innehörden av variabelbegreppet och dess användning i algebraiska uttryck, formler och ekvationer*. Här införs variabelbegreppet. Genom att eleverna får tillämpa det i algebraiska uttryck, formler och ekvationer lär de sig hur man kan uttrycka sig generellt med matematiska uttryckssätt.

Matematiska mönster

Matematiska mönster är ytterligare en aspekt av kunskapsområdet algebra. När eleverna får möta ett innehåll där mönster successivt kan ersättas med tal och bokstavs-beteckningar kan de tillägna sig ett algebraiskt tänkande och kunnande. I årskurserna 1–3 och 4–6 är innehållet *hur mönster i talföljder och geometriska mönster kan konstrueras, beskrivas och uttryckas*. Det kan till exempel handla om golvplattor, mönster på tapetbårder eller andra mönster som finns lättillgängliga i elevernas egen miljö. I årskurserna 7–9 fördjupas undervisningen genom innehållet *hur mönster i talföljder och geometriska mönster kan konstrueras, beskrivas och uttryckas generellt*.

Kunskaper om hur mönster i geometriska mönster och mönster i talföljder kan konstrueras och beskrivas ger eleverna möjlighet att utveckla tankemodeller för hur logiska mönster byggs upp och hur man kan kommunicera kring dessa.

Progressionen består i att mönstren blir allt mer komplext uppbyggda. Mönstren kan bestå av till exempel återkommande geometriska figurer eller mönster som växer symmetriskt. När eleverna utmanas att beskriva, konstruera och uttrycka mönster och talföljder på olika sätt, ges de möjlighet att utveckla sin förmåga att uttrycka sig generellt. Eleverna kan med stigande ålder ges möjlighet att fördjupa och utveckla sättet att uttrycka sig.

Algebraiska uttryck och ekvationer

I de lägre årskurserna lyfter kursplanen fram hur man kan uttrycka ett mönsters uppbyggnad med bilder och ord. Efter hand övergår detta till att man fokuserar på hur mönster kan uttryckas med symboler, för att slutligen uttryckas med ett algebraiskt symbolspråk. På så sätt lägger innehållet om matematiska mönster en grund för kunskaper om hur man använder algebraiska uttryck för att göra generella beskrivningar.

I årskurserna 4–6 ska eleverna få möta *enkla algebraiska uttryck och ekvationer som är relevanta för eleven*. Genom ett prövande förhållningssätt ges de möjlighet att utveckla kunskaper om hur enkla algebraiska uttryck och ekvationer kan skrivas. Med innehållet *variabelbegreppet och dess användning i algebraiska uttryck, formler och ekvationer* i årskurserna 7–9, kan eleverna utveckla sin förtrogenhet med mer generella uttryckssätt. Det kan till exempel vara en generell beskrivning av hur man beräknar arean av en geometrisk figur eller kostnaden för ett mobilabonnemang.

Ekvationslösning

För att kunna lösa ekvationer är det nödvändigt att ha kunskaper om matematiska likheter, variabelbegreppet och algebraiska uttryck. I årskurserna 4–6 ska eleverna få börja formulera enkla algebraiska uttryck och ekvationer i problemlösningssituationer. Med den grundläggande kunskapen kan de övergå till att lösa ekvationer genom att pröva sig fram eller genom att använda någon generell metod. Kursplanen uttrycker det som att undervisningen i årskurserna 4–6 ska behandla *metoder för enkel ekvationslösning*. I årskurserna 7–9 är motsvarande innehåll formulerat som *metoder för ekvationslösning*. Progressionen ligger i att eleverna i de högre årskurserna ska möta generella metoder. Ekvationerna som ska lösas beskriver också mer komplexa beräkningar och blir därmed allt mer sammansatta.

Programmering

I årskurserna 1–3 ska eleverna ges möta innehållet *hur entydiga stegvisa instruktioner kan konstrueras, beskrivas och följas som grund för programmering*. Med det innehållet ges eleverna möjlighet att ta det första steget i att utveckla förståelse för hur programmering kan användas. Det kan till exempel handla om att eleverna får ge varandra tydliga stegvisa instruktioner för att utföra vissa bestämda rörelser eller att gå en bestämd bana. Genom innehållet *symbolers användning vid stegvisa instruktioner* möter eleverna även de symboler som utgör en del av det programmeringsspråk som eleverna senare kan möta. Här kan eleverna till exempel inledningsvis få möjlighet att själva komma överens om vilka symboler som behövs för att beteckna ett antal upprepningar. Symbolhantering har en stor betydelse för förståelse av programmering och programmeringsspråk.

I årskurserna 4–6 ska eleverna ges möjlighet att möta innehållet *hur algoritmer kan skapas och användas vid programmering*. En algoritm utgörs av entydiga stegvisa instruktioner som styr en dator att göra det man vill. Det kan till exempel handla om att skapa algoritmer som beräknar medelvärde eller sorterar tal i storleksordning. Här finns en tydlig koppling till innehållet i teknik, där eleverna kan arbeta praktiskt med samma innehåll. När eleverna får möjlighet att pröva och utveckla sina kunskaper i *programmering i visuella programmeringsmiljöer* får de erfarenheter som gör det möjligt att förstå vad programmering är och dess möjligheter och risker. I *visuella programmeringsmiljöer* kan eleverna till exempel ”dra-och-släppa” fördefinierade grafiska element för att sätta samman sina program. Detta kallas i vardagligt tal ofta för blockprogrammering.

Genom innehållet i årskurserna 7–9, *hur algoritmer kan skapas och användas vid programmering*, ges eleverna möjlighet att fördjupa och bredda sina programmeringskunskaper och hur programmering kan användas. Därför ska de också ges möjlighet till *programmering i olika programmeringsmiljöer*.

Progressionen handlar om att utveckla kunskaper om hur tydliga stegvisa instruktioner och symboler, och senare även algoritmer, kan användas för att få en dator att utföra något. I de lägre årskurserna handlar det om att utveckla grundläggande förståelse för programmering, främst utifrån konkreta situationer, för att med ökad kunskap och erfarenhet i högre årskurser kunna använda programmering som ett verktyg i matematik. Det finns även en progression i de programmeringsverktyg som eleven möter. I årskurs 4–6 handlar det om *visuella programmeringsmiljöer* medan elever i de högre årskurserna ska få arbeta med *olika programmeringsmiljöer*. Det kan då förutom de tidigare visuella programmeringsmiljöerna till exempel handla om textbaserad programmering.

Geometri

Kunskapsområdet ”Geometri” handlar om hur man kan mäta och beskriva sin omgivning. Inom geometrin arbetar man med att känna igen, mäta, tolka och beskriva omvärlden utifrån olika rumsliga perspektiv med hjälp av olika uttrycksformer. Den geometri som används i dag har djupa historiska rötter, något som kursplanen tar fasta på och lyfter fram. Som ordet anger utvecklades geometrin från början ur behovet av

att kunna göra jordmätningar när människor skulle fördela åkerjord, göra gränsdragningar eller när man skulle bygga anläggningar för konstbevattning. Men geometri ska inte bara betraktas ur ett kulturellt och historiskt perspektiv. Kursplanen vill genom det centrala innehållet också betona att geometri har en estetisk dimension som kan upplevas och upptäckas i naturen, i konstverk och byggnader.

Kunskapsområdet är viktigt för att eleverna ska kunna utveckla kunskaper inom områdena ”Algebra” och ”Samband och förändring”.

Geometriska objekt och deras egenskaper

Geometriska objekt och deras egenskaper är ett genomgående innehåll i alla årskurser. Den övergripande progressionen i mötet med geometriska begrepp och objekt utgår från de konkreta formerna, deras egenskaper och relationer för att successivt övergå till olika objekts egenskaper och relationer i matematiska sammanhang, till exempel vid beräkningar av omkrets, area och volym.

I årskurserna 1–3 och 4–6 ska undervisningen behandla *grundläggande geometriska objekt... samt deras inbördes relationer. Grundläggande geometriska egenskaper hos dessa objekt*. Kursplanen nämner ett antal objekt för respektive årskursspann som ska ingå i undervisningen. Dessa objekt ska alla elever möta så att de tidigt får möjlighet att bekanta sig med objektens utseende, namn och relationer. Eleverna ska också tidigt få undervisning om och därigenom förståelse för att positionen inte har någon betydelse för den geometriska formen. Det vill säga att exempelvis en triangel fortfarande är en triangel även om den vrids och intar en annan position. På så sätt kan eleverna utveckla kunskaper om och förståelse för dels de enskilda objekten, dels relationen mellan olika objekt, till exempel mellan en kvadrat och en kub.

I årskurserna 1–3 ska eleverna få möta geometriska objekt som är elevnära. Det kan till exempel vara en boll och en låda. Eleverna görs förtrogna med de matematiska begreppen genom resonemang om likheter och skillnader, till exempel när det gäller sida, kant och hörn. Genom att benämningarna klot och rätblock introduceras lär sig eleverna de matematiska termerna för bollen och lådan.

I årskurserna 4–6 omfattar det centrala innehållet ytterligare geometriska objekt. I årskurserna 7–9 finns inga begränsningar för vilka objekt som ska studeras. Här är innehållet formulerat som *geometriska objekt och deras inbördes relationer. Geometriska egenskaper hos dessa objekt*.

Ett långsiktigt mål med matematikundervisningen är att eleverna ska utveckla förmågan att *använda och analysera matematiska begrepp*. Genom att eleverna redan i de tidiga årskurserna får möjlighet att beskriva objekt med hjälp av till exempel begreppen längd, bredd och höjd, utvecklar de kunskaper om både begreppen och objekten.

Konstruktion av geometriska objekt och skala

För att ytterligare utveckla elevernas kunskaper om geometriska objekt ingår även *konstruktion av geometriska objekt samt skala vid enkel förstoring och förminskning* i innehållet för årskurserna 1–3. Genom att avbilda och bygga geometriska objekt kan eleverna utveckla sin rumsuppfattning och få förståelse för begreppen proportionalitet och skala samt hur de kan tillämpas. Det kan till exempel handla om att rita eller bygga

rektanglar där sidorna ska göras dubbelt eller hälften så långa, eller att göra en enkel avbildning av klassrummet. I årskurserna 1–3 ska undervisningen även behandla *vanliga lägesord för att beskriva föremåls och objekts läge i rummet*, vilket också kan utveckla elevernas rumsuppfattning.

För årskurserna 4–6 finns innehållet *konstruktion av geometriska objekt, såväl med som utan digitala verktyg. Skala och dess användning i vardagliga situationer*. Det kan till exempel handla om att tolka enkla kartor, göra avbildningar av skolgården eller konstruera tredimensionella geometriska objekt digitalt. Det här innehållet har tydliga kopplingar till innehållet i ämnena idrott och hälsa samt geografi. I årskurserna 7–9 ska undervisningen behandla *avbildning och konstruktion av geometriska objekt, såväl med som utan digitala verktyg. Skala vid förminskning och förstoring av två- och tredimensionella objekt*. Det innebär att eleverna ska tillämpa sina kunskaper om konstruktioner och skala genom att beskriva verkligheten med avbildningar. Innehållet förminskning och förstoring av två- och tredimensionella objekt har många beröringspunkter med ämnena slöjd och teknik där dessa kunskaper kan användas för att göra skisser, modeller och ritningar.

Progressionen består i att de två- och tredimensionella objekten blir allt mer komplext uppbyggda och att undervisningen i de högre årskurserna även omfattar skalenliga avbildningar.

Symmetri

De regelbundna mönster som vi har omkring oss, till exempel i ansikten, blommor, mosaiker eller i tapetmönster bygger ofta på symmetrier. Kunskaper om symmetri handlar om att kunna urskilja och konstruera regelbundna mönster i omvärlden. Det kan alltså handla både om symmetrier i naturen och i andra skapande sammanhang, till exempel i konsten. I matematiken innebär symmetri att en form eller ett mönster upprepas enligt vissa regler. En vanlig form av symmetri är spegelsymmetri där en punkt eller ett plan speglas, till exempel punkten 3 som speglas av punkten -3 på tallinjen. Ett annat exempel är fjärilsvingar vars sidor är speglingen av varandra.

I de lägre årskurserna finns innehållet *symmetri och hur symmetri kan konstrueras*. I årskurserna 4–6 är motsvarande innehållspunkt *symmetri i vardagen, i konsten och i naturen samt hur symmetri kan konstrueras*. Med hjälp av digitala verktyg och programmering kan elever, utan att begränsas av sin förmåga att använda hantverksmässiga tekniker och verktyg, skapa avancerade symmetrier som tydliggör geometriens estetiska värden. Tidiga möten med symmetri i olika sammanhang ger eleverna en möjlighet att uppleva estetiska värden i matematiska mönster, former och samband och kan utveckla deras förmåga att tolka, beskriva och generalisera olika mönster. Kunskaper om symmetri kan även bidra till att eleverna får bättre förståelse för hur ett geometriskt objekt är uppbyggt.

Progressionen består i att eleverna i de lägre årskurserna får en grund att stå på för att utveckla kunskap om olika typer av symmetrier. I de senare årskurserna formaliseras kunskaperna allt mer och fler symmetriska begrepp introduceras. Kursplanen anger att eleverna i årskurserna 7–9 ska möta innehållet *likformighet och symmetri i planet*. Symmetrier i planet handlar om symmetrier där tvådimensionella former ingår. Det kan till exempel vara att en form roteras, rotationssymmetri, eller ändrar storlek,

likformighet. Det kan också vara tesselering där man täcker en yta med en form och där ingen del av formen överlappar en annan, eller inget tomrum finns.

Mätning och beräkning av area och omkrets

Kunskaper om mätning och hur man använder olika mätredskap är en grundläggande del av geometrin. Här handlar det om att eleverna ska utveckla förståelse för mätandets idé, det vill säga att ett och samma mätredskap, till exempel en penna, en pinne eller ett papper, kan användas upprepade gånger för att därigenom skapa en uppfattning av värdet på en storhet. Man kan till exempel undersöka, jämföra och uppskatta ytors area med hur många A4-ark det får plats på bordet.

Genom innehållet *jämförelser och uppskattningar av matematiska storheter. Mätning av längd, massa, volym och tid med vanliga nutida och äldre måttenheter* får eleverna i årskurserna 1–3 erfarenheter av att jämföra och uppskatta olika storheter som till exempel sträcka, area eller volym, innan de övergår till att mäta och använda olika måttenheter. Innehållet handlar också om att använda rätt enhet i rätt situation och sammanhang och att kunna skifta mellan olika enheter beroende på vad det är man vill uttrycka.

I årskurserna 4–6 utvidgas innehållet till *jämförelse, uppskattning och mätning av längd, area, volym, massa, tid och vinkel med vanliga måttenheter*. Här ska undervisningen också behandla *metoder för hur omkrets och area hos olika tvådimensionella geometriska figurer kan bestämmas och uppskattas*. Med metoder avser kursplanen för de här årskurserna olika formella eller informella tillvägagångssätt för att bestämma omkrets och area.

I årskurserna 7–9 tillkommer *metoder för beräkning av area, omkrets och volym hos geometriska objekt, samt enhetsbyten i samband med detta*. Här ska eleverna få möta metoder för beräkning av olika storheter även hos tredimensionella objekt. Genom att genomföra enhetsbyten i samband med beräkningarna fördjupas deras förståelse ytterligare för vikten av att använda rätt enhet vid rätt tillfälle. Eleverna kan tidigt börja reflektera över detta, till exempel varför säger vi inte att det är tre miljoner millimeter till affären? För de äldre eleverna ligger fokus mer på vilka enheter som är relevanta vid beräkningar av area och volym.

Historiskt perspektiv

Kursplanen lyfter fram att eleverna i årskurserna 1–3 ska få kunskaper om både *nutida och äldre måttenheter*. Motsvarande innehållspunkt i årskurserna 4–6 är *mätningar med användning av nutida och äldre metoder*. Tanken här är att eleverna genom ett historiskt perspektiv ska utveckla en djupare förståelse för de enheter och metoder som används i dag. Förståelse för hur de äldre måttenheterna, till exempel en famn eller en aln, skapades utifrån behov i praktiska sammanhang, kan göra det lättare att förstå mätandets principer. Med kunskaper om hur bland annat ökat handelsutbyte ledde till en utveckling mot olika standardmått och ett internationellt enhetssystem, kan eleverna få ytterligare perspektiv på mätning.

Utvecklingen av digitala mätinstrument som till exempel laserinstrument och GPS, har medfört att mätmetoderna har förändrats och utvecklats snabbt. Därigenom har behovet av att reflektera över mätresultat och lämplig måttenhet också ökat.

Geometriska satser

Geometriska satser och formler och behovet av argumentation för deras giltighet är ett innehåll som bara finns i årskurserna 7–9. Det innebär att eleverna ska få möjlighet att argumentera för formlers giltighet och visa på samband mellan grundläggande geometriska begrepp. De ska också ges möjlighet att resonera om och hur man inom matematiken avgör om något är sant eller inte. På så vis lägger kursplanen grunden för elevernas förståelse av innebörden i begreppen sats och bevis i framtida studier.

Som tidigare framhållits är det viktigt att matematikens olika kunskapsområden inte ses som åtskilda delar, utan som områden som går in i och berikar varandra. Tydligast kan detta ses just i skärningen mellan kunskapsområdena ”Algebra” och ”Geometri”. Det finns ett ömsesidigt samband mellan algebra och geometri genom att grundläggande kunskaper i algebra är en förutsättning för att utveckla kunskaper inom geometri och omvänt. Ett exempel är användningen av formler när man beräknar omkrets och area. Ett annat exempel är förklaringar av geometriska relationer och satser som till exempel Pythagoras sats, där det krävs grundläggande kunskaper både i geometri och algebra för att kunna resonera med matematiska argument och generalisera kring relationer och slutsatser.

Sannolikhet och statistik

Kunskapsområdet ”Sannolikhet och statistik” tar avstamp i kursplanens syfte om att eleverna ska kunna *fatta välgrundade beslut i vardagslivets många valsituationer och delta i samhällets beslutsprocesser*.

Sannolikhet syftar på slumpmässiga händelser – det vill säga händelser där man inte med säkerhet kan förutse vad som kommer att hända. Många lekar och spel bygger på slumpmässiga händelser och kunskaper om sannolikhet, chans och risk kan därför vara intressanta för eleverna.

Statistik syftar på sammanställningar, presentationer och beskrivningar av information utifrån olika typer av data eller undersökningar. Mycket av den information som möter oss i vardagen är statistisk information. Det kan vara idrottsresultat, privat-ekonomiska kalkyler eller geografiska data. Statistik kan presenteras på en mängd olika sätt och den används ibland i syfte att vilseleda. Det är därför centralt att ha kunskaper om statistik för att kunna tolka, bedöma och värdera olika typer av information.

Sannolikhet

Genom innehållet *slumpmässiga händelser i experiment och spel* ska eleverna i årskurserna 1–3 få erfarenhet av slumpmässiga händelser i praktiska och konkreta situationer. De kan då resonera om till exempel möjligheten att bara få sexor när man slår en tärning upprepade gånger. I årskurserna 4–6 vidgas innehållet till *sannolikhet, chans och risk grundat på observationer, simuleringar eller statistiskt material från*

vardagliga situationer, vilket innebär att eleverna får möta sannolikhet, chans och risk som begrepp i undervisningen.

För årskurserna 7–9 är innehållet om sannolikhet formulerat som *likformig sannolikhet och metoder för att beräkna sannolikheten i vardagliga situationer*. Här är det möjligt att börja analysera själva utfallet av slumpmässiga händelser och försök. Det handlar om att kunna förutsäga sannolikheten för att något ska hända, till exempel sannolikheten att få en dam när man drar ett kort ur en kortlek. Progressionen går från att man i de lägre årskurserna får möjlighet att resonera om sannolikhet utifrån enkla försök, experiment och observationer, till att man i de senare årskurserna möter olika metoder för att förutsäga händelser.

Kombinatorik

Kombinatorik handlar om möjligheterna att välja ut och ordna de ingående delarna i en mängd. Kombinatorik är användbar och till god hjälp när man till exempel ska bedöma chanser vid olika slags spel. Detta är ett innehåll som bara finns i årskurserna 4–6 och 7–9, men det finns inget hinder för att även låta de yngre eleverna få prova på kombinatorik.

I årskurserna 4–6 ska undervisningen behandla *enkel kombinatorik i konkreta situationer*. Det tidiga mötet med kombinatorik innebär att eleverna ska få erfarenheter av olika konkreta situationer som rymmer möjligheter till olika kombinationer. Klassiska problem är ”på hur många sätt kan en kö se ut om det är fem personer som står i kön” och ”på hur många olika sätt kan en lottorad se ut?”.

För årskurserna 7–9 är innehållet *hur kombinatoriska principer kan användas i enkla vardagliga och matematiska problem*. Progressionen ligger dels i att eleverna efter hand får möta nya situationer där kombinatorik ska tillämpas, dels i att de får tillämpa allt fler kombinatoriska principer. Vid fortsatta studier kan eleverna möta kombinatorik inom diskret matematik, ett område inom matematiken som har blivit allt viktigare då det bland annat används inom datavetenskap.

Sortera, beskriva och tolka statistiskt material

Statistik handlar om att samla in, organisera, presentera och tolka data. När eleverna genomför dessa moment kan deras förtrogenhet med statistiska metoder och begrepp utvecklas. Statistiska metoder är användbara när eleverna ska beskriva sin omgivning och olika fenomen i närmiljön och världen. Digitala verktyg används ofta för att samla in, sortera och analysera stora mängder data och därför anger kursplanen att eleverna i alla årskurser ska genomföra sina undersökningar *såväl med som utan digitala verktyg*. Genom att använda digitala verktyg inom statistik kan eleverna också få möjlighet att arbeta med stora datamängder, till exempel från offentliga källor. Ett vanligt exempel på digitalt verktyg för att bearbeta data är kalkylprogram. Digitala verktyg inom statistik kan också ge eleven möjligheter att dela med sig av sina resultat till andra.

Kursplanen anger att eleverna i årskurserna 1–3 ska få möta *enkla tabeller och diagram och hur de kan användas för att sortera data och beskriva resultat från enkla undersökningar*. I årskurserna 4–6 utvidgas detta till *tabeller och diagram för att beskriva resultat från undersökningar* samt *tolkning av data i tabeller och diagram*. När eleverna

arbetar med egna undersökningar kan de utveckla fler sätt att presentera data på, med stöd av bilder, konkret material eller digital teknik. Genom att ställa frågor och dra slutsatser om information som finns i tabeller och diagram utvecklar de sitt kunnande om hur man tolkar data. Det kan till exempel innebära att avläsa ett diagram i en nyhetsartikel, för att därefter analysera den information man fått fram och jämföra den med innehållet i tidningsartikeln.

Med innehållet *tabeller, diagram och grafer samt hur de kan tolkas och användas för att beskriva resultat av egna och andras undersökningar* i årskurserna 7–9 utvecklas metoderna för att beskriva och tolka resultat. Eleverna får nu möta flera statistiska begrepp och uttrycksformer. Innehållet öppnar också för att eleverna ges möjligheter att utveckla och i allt högre grad använda de statistiska uttrycksformerna i olika undersökningar. Detta är värdefulla kunskaper för att skaffa sig bra underlag när man ska fatta beslut i både vardagen och yrkeslivet.

För årskurserna 7–9 finns även innehållspunkten *bedömningar av risker och chanser utifrån datorsimuleringar och statistiskt material*. Här ska eleverna ges möjlighet att tillämpa sina kunskaper om begreppen risk och chans utifrån simuleringsprogram eller statistiska undersökningar, där olika lösningar eller hypoteser prövas. På så sätt kan deras förmåga att resonera med matematiska argument utvecklas.

Lägesmått och spridningsmått

För att eleverna ska kunna beskriva data som har samlats in vid undersökningar behöver de kunskaper om läges- och spridningsmått som till exempel medelvärde, median, typvärde och kvartil. I årskurserna 4–6 lyfter kursplanen fram *lägesmått medelvärde, typvärde och median samt hur de kan användas vid statistiska undersökningar*. Detta utvecklas i årskurserna 7–9 till *hur lägesmått och spridningsmått kan användas för bedömning av resultat vid statistiska undersökningar*.

Vilka lägesmått och spridningsmått som lämpar sig bäst för att beskriva resultaten från olika undersökningar är en central kunskap. Den behövs för att man ska kunna presentera resultat från undersökningar på ett rättvisande sätt. Lägesmått och spridningsmått är också viktiga underlag för att kunna resonera och argumentera kring resultaten från undersökningar.

Samband och förändring

I kunskapsområdet ”Samband och förändring” lyfter kursplanen fram ett matematiskt innehåll som i hög grad är användbart både i vardagen och i vidare studier. Kunskaper om samband och förändring är angelägna i såväl privatlivet som inom olika ämnesområden och för att kunna delta i samhällsdebatten. Det kan till exempel vara frågor som rör banklån, energiförbrukning eller befolkningstillväxt.

Ett mycket vanligt sätt att beskriva förändringar och förändringstakt på är att använda procent. Därför är beräkningar med procent i olika situationer ett viktigt innehåll här. Kunskapsområdet handlar också om hur man hittar samband mellan olika företeelser och kan beskriva dessa med olika uttrycksformer. Det kan vara att beskriva sambandet mellan en rektangels sidor och dess area, eller att beskriva en förändring, till exempel hur mycket en planta har vuxit under en viss tid. Samband och

förändringar kan uttryckas med hjälp av tabeller, grafer, koordinatsystem eller generellt som formler.

Kunskapsområdet är nära kopplat till kunskapsområdena ”Taluppfattning och tals användning”, ”Geometri” samt ”Algebra”.

Proportionella samband och procent

Inom matematiken är proportionalitet definierat som den konstanta relationen mellan två storheter. Proportionalitet kan fungera som en tankemodell i olika sammanhang. Att till exempel utifrån en karta få en uppfattning om hur långt det är mellan två platser handlar om att förstå att en viss sträcka är 100 gånger längre i verkligheten än på kartan, det vill säga att proportionen mellan kartan och verkligheten är 1:100. En sådan tankemodell ger matematiken struktur. Den som har en god uppfattning av proportionalitet kan överföra modelltänkandet till beräkningar av exempelvis procent eller skala vid förminskningar och förstoringar.

Vikten av att eleverna tidigt förstår ett modelltänkande som proportionalitet ska inte underskattas. Därför finns innehållet *olika proportionella samband, däribland dubbelt och hälften* i årskurserna 1–3. Det finns andra proportionella samband utöver dubbelt och hälften som undervisningen kan ta upp i de lägre årskurserna, till exempel att en sträcka är tio gånger så lång som en annan sträcka eller att en frukt delad på fyra består av fyra fjärdedelar. Med utgångspunkt i de proportionella begreppen hälften och dubbelt och deras samband, tillsammans med kunskaper om del av helhet och del av antal, får de yngsta eleverna förutsättningar att utveckla förståelse för begreppet procent.

I årskurserna 4–6 finns innehållet *proportionalitet och procent samt deras samband*. Tillsammans med innehållspunkten *tal i bråk- och procentform och deras användning* i kunskapsområdet ”Tal och tals användning” läggs grunden för elevernas kunskaper om beräkningar med procent. Detta är ett centralt innehåll i årskurserna 7–9 och formuleras där som *procent för att uttrycka förändring och förändringsfaktor samt beräkningar med procent i vardagliga situationer och i situationer inom olika ämnesområden*.

Funktioner, grafer och koordinatsystem

Genom kunskapsområdet ”Sannolikhet och statistik”, utvecklar eleverna i årskurserna 1–3 grundläggande kunskaper om hur de kan använda enkla tabeller och diagram för att sortera data och beskriva resultat från undersökningar. Dessa kunskaper tillämpas och utvecklas vidare i årskurserna 4–6, men då i kunskapsområdet ”Samband och förändring” genom innehållet *grafer för att uttrycka olika typer av proportionella samband vid enkla undersökningar*. Med hjälp av grafer och koordinatsystem kan eleverna visualisera samband och förändringar. Det kan till exempel vara att med en graf illustrera hur långt en bil med en viss hastighet hinner på en viss tid. I årskurserna 4–6 ska undervisningen även behandla *koordinatsystem och strategier för gradering av koordinataxlar*. Det innebär att eleverna ska göra graderingar av koordinataxlar, för att sedan placera ut punkter utifrån information av olika slag. Här ingår också att lokalisera punkter i ett koordinatsystem eller en graf utifrån givna frågeställningar eller situationer.

För årskurserna 7–9 anger kursplanen att eleverna ska möta *funktioner och räta linjens ekvation*. Hur funktioner kan användas för att, såväl med som utan digitala verktyg, undersöka förändring och förändringstakt och samband. Innehållspunkten handlar om att beskriva samband och förändringar med användning av begreppet funktion. Sambanden kan uttryckas med hjälp av tabeller, grafer, koordinatsystem eller generellt som en formel. Ett exempel på funktionssamband är när en variabel är tiden. Om man till exempel planterar ett blomfrö och sedan varje dag mäter höjden på den växande blomman och ritar ut den på ett papper eller använder ett digitalt verktyg, blir resultatet en funktionsgraf. Genom att använda digitala verktyg kan undervisningen fokusera på förståelsen av hur en funktion kan representera ett samband. Eleverna kan till exempel lättare tolka och uttrycka hur stor förändringen är, under vilken tid den skett eller vilken typ av förändring det handlar om.

En funktion som beskriver ett enkelt proportionellt samband, till exempel direkt proportionalitet, kallas ett linjärt samband. *Räta linjens ekvation*, som är en del av det här innehållet, är en representationsform för ett sådant direkt proportionellt samband.

Funktioner är ett abstrakt begrepp, men genom att eleverna utvecklar förtrogenhet med olika uttrycksformer och hur man växlar mellan dem ökar deras möjlighet att förstå begreppet. Ytterst handlar innehållet om att kunna uttrycka samband numeriskt, grafiskt och algebraiskt. Det kan vara betydelsefullt i många situationer i vardagslivet och i samhället, till exempel vid återbetalning av lån eller när man vill räkna ut och jämföra kostnader för mobilabonnemang.

Det är viktigt att innehållet i det här kunskapsområdet utgår från elevnära situationer. På så sätt får eleverna möjlighet att gradvis utveckla en alltmer abstrakt och generell förståelse för hur man med matematiska uttrycksformer kan beskriva förändringar och förändringstakt. Här kan matematisk programvara och annan digital teknik vara till hjälp för att konkretisera och tydliggöra samband och förändringar.

Formulera och lösa problem

I kunskapsområdet ”Formulera och lösa problem”, lyfter kursplanen fram de olika verktyg som eleverna behöver för att utveckla kunskaper i och om problemlösning. Verktygen består av olika tillvägagångssätt, det vill säga strategier, för att lösa matematiska problem. I problemlösning ingår också att kunna tolka och formulera frågeställningar med matematiska uttrycksformer.

Matematiska problem är situationer eller uppgifter där eleverna inte på förhand känner till hur problemet ska lösas. Istället måste de undersöka och prova sig fram för att finna en lösning. Matematiska problem kan också beskrivas som uppgifter som inte är av rutinkaraktär. Oftast förekommer ett problem i en konkret situation som gör att eleverna behöver göra en matematisk tolkning av situationen. Ibland är problemen inommatematiska och saknar då direkt anknytning till en vardaglig situation.

Strategier för problemlösning

En ambition med kursplanen i matematik är att eleverna under grundskoletiden ska utveckla strategier för problemlösning i allt vidare sammanhang. Strategier är ett

samlingsbegrepp för olika tillvägångssätt för att bland annat formulera och lösa problem i olika situationer i vardagen och inom olika ämnesområden. Strategier kan vara medvetna eller delvis omedvetna. De kan också vara planerade och ha en given gång. De kan även vara olika effektiva när det gäller hur väl de fungerar och är anpassade till sammanhanget. Valet att använda olika hjälpmedel, till exempel miniräknare, kan också vara delar av en strategi.

I årskurserna 1–3 ska eleverna få möta *strategier för matematisk problemlösning i enkla situationer*. Med enkla situationer avser kursplanen elevnära och bekanta sammanhang, till exempel hur många flaskor läsk som behöver köpas till klassfesten. I årskurserna 4–6 vidgas problemlösningen till att omfatta *vardagliga situationer*. Det innebär att eleverna kan ställas inför mer komplexa situationer, det vill säga situationer som i och för sig är vardagliga men ligger en bit bort från elevernas erfarenhetsvärld, till exempel att göra en budget.

I årskurserna 7–9 är motsvarande innehållspunkt *strategier för matematisk problemlösning i vardagliga situationer och inom olika ämnesområden samt värdering av valda strategier och metoder*. Här vidgas sammanhangen för elevernas problemlösning ytterligare. Att kunna värdera sina val av strategier och metoder är en viktig aspekt av problemlösning. Genom att eleverna i de högre årskurserna får kunskaper om hur man kan värdera sina val utvecklar de en medvetenhet om hur effektivt deras tillvägångssätt är i förhållande till problemet.

Matematisk formulering av frågeställning

Att lösa problem handlar till att börja med om att kunna tillägna sig det matematiska innehållet i olika situationer. Därefter gäller det att tolka innehållet och utforma en frågeställning med hjälp av olika matematiska uttrycksformer. I kursplanen uttrycks detta i årskurserna 1–3 som att eleverna ska möta *matematisk formulering av frågeställningar utifrån enkla vardagliga situationer*. I årskurserna 4–6 blir situationerna allt vidare genom att eleverna möter matematisk formulering av frågeställningar utifrån *vardagliga situationer* och i årskurserna 7–9 *vardagliga situationer och olika ämnesområden*. Här vidgas innehållet ytterligare till att spegla det som eleverna kommer att möta i vidare studier och i livet utanför skolan.

I årskurserna 7–9 är *enkla matematiska modeller och hur de kan användas i olika situationer* ett centralt innehåll. Att ta fram en modell är ett sätt att översätta en situation från ett annat område än matematik till ett matematiskt symbolspråk. Att använda matematiska modeller innebär också att analysera modellens giltighet och att översätta modellen tillbaka till situationen.

I mötet med det centrala innehållet i de lägre årskurserna har eleverna redan utvecklat förmågan till generellt tänkande. Räknehändelser kan vara ett sätt för de yngre eleverna att översätta en verklig eller påhittad situation till en enkel modell. I de högre årskurserna ska eleverna i allt högre grad få övning i att översätta situationer till modeller och värdera dessa modeller, för att slutligen kunna formulera alltmer generella modeller med hjälp av algebraiska uttryck.

En generell modell kan även uttryckas som en algoritm. Genom att skapa en algoritm med utgångspunkt i en matematisk eller vardaglig situation är det möjligt att

lösa olika typer av problem. Det kan till exempel handla om att skapa en algoritm för att i en visuell programmeringsmiljö rita upp en godtycklig regelbunden månghörning eller i en textbaserad programmeringsmiljö beräkna ett närmevärde till talet π . Kursplanen anger därför att eleverna ska möta innehållet hur algoritmer kan skapas, testas och förbättras vid programmering för matematisk problemlösning.

KUNSKAPSKRAVEN

Kunskapskraven är skrivna i löpande text och ger helhetsbeskrivningar av vilka kunskaper som krävs för de olika betygsstegen. De grundar sig på förmågorna som beskrivs i de långsiktiga målen samt på det centrala innehållet.

Kunskapsformer och helhetssyn

Kunskapskraven är konstruerade utifrån den kunskapssyn som finns i läroplanen. Där beskrivs att kunskap kommer till uttryck i olika former, så kallade kunskapsformer, som förutsätter och samspelar med varandra. Dessa kunskapsformer kan till exempel vara att kunna analysera eller framställa något. Enligt läroplanen måste skolans arbete inriktas på att ge utrymme för olika kunskapsformer och skapa ett lärande där de olika formerna balanseras och blir till en helhet. Detta innebär att en specifik kunskapsform inte kan kopplas samman med ett visst betygssteg. Att en elev behärskar fakta i form av minneskunskap är med andra ord inte enbart knutet till betyget E. På samma sätt leder en elevs förståelse och analysförmåga inte automatiskt till betygen C eller A. Av den anledningen finns de kunskapsformer som beskrivs i ämnets långsiktiga mål uttryckta på alla betygsnivåer.

Kunskapskrav för olika årskurser

Kunskapskraven i matematik beskriver vad som krävs för godtagbara kunskaper i årskurs 3 och för de olika betygsstegen i årskurs 6 och 9 i grundskolan. Kraven utgår från de långsiktiga målen i syftet och relaterar till det centrala innehållet i respektive årskursspann 1–3, 4–6 och 7–9.

Kunskapskraven är skrivna som helhetsbeskrivningar och för att få betyget E, C eller A krävs att elevens kunskaper motsvarar beskrivningen av kunskapskravet i sin helhet.

I tabellform

Det är viktigt att läsa och förstå kunskapskraven ur ett helhetsperspektiv. Men för att det ska vara lätt att urskilja progressionen, det vill säga hur kraven förändras och utvecklas mellan betygsstegen, presenteras de förutom i löpande text även i en tabell i kursplanen.

Avläser man tabellen vertikalt framträder ett betygssteg i sin helhet. Läser man den istället horisontellt syns progressionen mellan betygsstegen tydligt. De fetmarkerade orden visar vad som skiljer kunskapskraven på de olika betygsstegen från varandra. Exempel:

Kunskapskrav för betyget E i slutet av årskurs 9	Kunskapskrav för betyget C i slutet av årskurs 9	Kunskapskrav för betyget A i slutet av årskurs 9
Eleven kan välja och använda i huvudsak fungerande matematiska metoder med viss anpassning till sammanhanget för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter inom aritmetik, algebra, geometri, sannolikhet, statistik samt samband och förändring med tillfredsställande resultat.	Eleven kan välja och använda ändamålsenliga matematiska metoder med relativt god anpassning till sammanhanget för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter inom aritmetik, algebra, geometri, sannolikhet, statistik samt samband och förändring med gott resultat.	Eleven kan välja och använda ändamålsenliga och effektiva matematiska metoder med god anpassning till sammanhanget för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter inom aritmetik, algebra, geometri, sannolikhet, statistik samt samband och förändring med mycket gott resultat.

Varje del av kunskapskraven inleds med en beskrivning av vad eleven kan eller har kunskaper om. Den beskrivningen tar sin utgångspunkt i en eller flera förmågor (i exemplet ovan förmågan att *välja och använda lämpliga matematiska metoder för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter*). De beskriver även hur eleven visar sitt kunnande för de olika betygsstegen. Det är genom den beskrivningen som kvaliteten eller nivån på elevens kunnande syns.

Sammanfattande uttryck

För att kunskapskraven ska vara hanterbara och inte bli alltför omfattande, preciseras inte innehållet lika detaljerat i kunskapskraven som i det centrala innehållet. Alltför detaljerade kunskapskrav skulle även kunna ge oönskade effekter vid betygssättningen. Enstaka detaljer i kunskapskraven som eleven inte motsvarar skulle kunna leda till att eleven inte uppfyller kunskapskravet i sin helhet. Innehållet beskrivs därför ofta med sammanfattande uttryck i kunskapskraven.

Exempel:

Det sammanfattande uttrycket *matematiska metoder för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter* som finns i utdraget ur kunskapskravet ovan syftar på flera olika punkter i det centrala innehållet. I årskurserna 7–9 syftar det bland annat på:

- Centrala metoder för beräkningar med tal i bråk- och decimalform vid överslagsräkning, huvudräkning samt vid beräkningar med skriftliga metoder och digital teknik. Metodernas användning i olika situationer.
- Metoder för ekvationslösning.
- Metoder för beräkning av area, omkrets och volym hos geometriska objekt, samt enhetsbyten i samband med detta.
- Procent för att uttrycka förändring och förändringsfaktor samt beräkningar med procent i vardagliga situationer och i situationer inom olika ämnesområden.

Relationen mellan kunskapskraven och de långsiktiga målen

Eleverna ska ges möjlighet att utveckla förmågorna i de långsiktiga målen genom hela grundskoletiden. Här följer en övergripande beskrivning av utvecklingen i förmågorna, det vill säga progressionen, i ämnet matematik och hur den skrivs fram i kunskapskraven.

Förmågan att

- *formulera och lösa problem med hjälp av matematik samt värdera valda strategier och metoder*

Progressionen i förmågan att formulera och lösa problem med hjälp av matematik utgår i de tidigare årskurserna från att eleven löser enkla problem i elevnära situationer och använder någon strategi med viss anpassning till problemets karaktär. I senare årskurser övergår den i ett krav på att eleven löser olika problem i bekanta situationer. På de högre betygsnivåerna ökar kraven på att eleven väljer och använder strategier och metoder med anpassning till problemets karaktär. Efter hand tillkommer ett krav på att eleven i allt högre utsträckning bidrar till att formulera enkla matematiska modeller som kan tillämpas i sammanhanget.

När det gäller förmågan att värdera valda strategier och metoder är utgångspunkten i de tidigare årskurserna att eleven beskriver tillvägagångssätt och ger enkla omdömen om resultatens rimlighet. I senare årskurser och på de högre betygsnivåerna krävs att eleven visar ökat djup i sina resonemang om tillvägagångssätt och resultatens rimlighet. Dessutom ökar kraven på att eleven bidrar till att föreslå alternativa tillvägagångssätt.

- *använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp*

Här utgår progressionen från att eleven i tidigare årskurser använder grundläggande begrepp i vanligt förekommande sammanhang, för att efter hand använda begrepp i utökad omfattning i alltmer obekanta sammanhang. På de högre betygsnivåerna krävs också ett alltmer välfungerande sätt att använda begreppen och beskriva dem med flera olika matematiska uttrycksformer. Det ligger även en progression i att eleven visar ökat djup i sina resonemang om hur begreppen relaterar till varandra.

- *välja och använda lämpliga matematiska metoder för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter*

I den här förmågan utgår progressionen i de tidigare årskurserna från att eleven väljer och använder metoder med viss anpassning till sammanhanget för att göra enkla beräkningar och lösa enkla rutinuppgifter. I senare årskurser och på de högre betygsnivåerna ligger progressionen i att eleven behärskar allt fler metoder och väljer och använder dem med ökad precision och grad av anpassning till sammanhanget.

- *använda matematikens uttrycksformer för att samtala om, argumentera och redogöra för frågeställningar, beräkningar och slutsatser*
- och
- *föra och följa matematiska resonemang*

När det gäller förmågan att använda matematikens uttrycksformer för att kommunicera är utgångspunkten i de tidigare årskurserna enkla beskrivningar av tillvägagångssätt med konkret material, bilder, symboler och andra matematiska uttrycksformer. I senare årskurser och på de högre betygsnivåerna ställs krav på att eleven beskriver tillvägagångssätt med mer precisa och välutvecklade matematiska uttrycksformer och ökad grad av anpassning till syfte och sammanhang.

Progressionen i förmågan att föra och följa matematiska resonemang ligger i allt högre krav på elevens sätt att framföra och bemöta matematiska argument i redovisningar, samtal och diskussioner.

Bilaga: Användningen av värdeord i kunskapskraven

I kunskapskraven används ett antal uttryck, så kallade värdeord, för att beskriva kunskapsnivåer för olika betygssteg. För att kunskapskraven ska bli enhetliga och tydliga har varje betygssteg ett begränsat antal värdeord som används enbart för det betygssteget. Till exempel används uttrycket ”mycket goda” uteslutande på A-nivån, oavsett ämne. Alla värdeord i kunskapskraven är fetmarkerade för att skillnaderna mellan kunskapskraven ska bli tydliga.

De enda tillfällen då värdeorden är desamma för flera betygssteg är när kraven inte ökar mellan betygen. Då används samma värdeord som för det underliggande betygssteget. Ett exempel är kravet på simkunnighet i ämnet idrott och hälsa. Eftersom det ställs samma krav på simkunnighet för alla betygsnivåer uttrycks kravet på samma sätt för alla nivåer.

Kunskapskraven i engelska, moderna språk och teckenspråk för hörande skiljer sig från övriga ämnen i sin uppbyggnad och i begreppsanvändningen. Det beror på att kursplanerna och kunskapskraven i dessa ämnen utgår från den gemensamma europeiska referensramen för språk (GERS).

Sammanställning av värdeord

Nedan följer en sammanställning av några av de vanligaste värdeorden i kunskapskraven. Sammanställningen rymmer bara sådana värdeord som används i flera ämnen. På så sätt kan den tjäna som underlag för vidare diskussioner och jämförelser kring hur värdeorden används i olika ämnen.

I vissa fall anges i tabellen nedan alternativa värdeord för en nivå. Uttrycken varierar ibland något mellan kursplanerna för att nyansskillnader mellan olika ämnen ska bli tydliga, eller för att uttrycken ska passa in i olika textsammanhang. I många fall är uttrycken sådana att absoluta gränsdragningar mellan dem inte är möjliga att göra. Då måste värdeorden tolkas och förstås i relation till det sammanhang och det innehåll de relaterar till i respektive ämne. I anslutning till varje uppsättning värdeord följer en kort beskrivning av hur de används i kunskapskraven.

E	C	A
grundläggande	goda	mycket goda

Uttrycken används för att ange kvaliteten på de kunskaper som eleven har om något, till exempel *eleven har goda kunskaper om...* När de här uttrycken används följer en beskrivning av hur elevens kunskaper visar sig. Konstruktionen har vanligen formen: *eleven har grundläggande kunskaper om xyz och visar det genom att...* Den beskrivning som följer anger alltså nivån på vad grundläggande kunskaper innebär i det aktuella ämnet.

E	C	A
enkla	utvecklade	välutvecklade <i>alternativt</i> välutvecklade och nyanserade

Uttrycken används för att ange kvaliteten i flera olika sammanhang, till exempel kvaliteten på beskrivningar, sammanfattningar, textbindningar, redogörelser, omdömen, motiveringar, dokumentationer eller resonemang. Begreppet *enkla* används alltid för att ange graden av komplexitet och inte för att ange att något är lätt att göra.

Graden av utveckling kan kännetecknas av olika saker beroende på sammanhang. I frasen *eleven kan ge enkla omdömen...* används till exempel värdeorden för att beskriva hur utvecklad förmåga att utvärdera något som eleven visar. Med enkla omdömen avses då att omdömena grundar sig på basala analyser, är övergripande till sin karaktär och har tydliga inslag av subjektiva värderingar. Mer utvecklade omdömen grundar sig på djupare analyser och de är mer specifika till sin karaktär. De kännetecknas också av att värderingarna är sakliga snarare än subjektiva.

Ett annat exempel på hur de här värdeorden används är att de ibland anger med vilken kvalitet eleven motiverar olika ställningstaganden och val, exempelvis *eleven formulerar ställningstaganden med enkla motiveringar*. Enkla motiveringar kännetecknas ofta av att de är allmänt hållna och baseras mer på subjektiva värdeomdömen än på utvecklade argumentationer. Mer utvecklade motiveringar kännetecknas av att de väger in flera olika aspekter och baseras på allt mer tydliggjorda argumentationer och tankegångar.

Värdeorden enkla/utvecklade/välutvecklade används ofta för att ange kvaliteten på elevens resonemang, som i exemplet *eleven för också enkla resonemang om verket med kopplingar till dess upphovsman...* Mer utvecklade resonemang kan till exempel innefatta flera olika kopplingar, längre resonemangskedjor eller en avvägd balans mellan detaljer och helhet. I samband med resonemang kombineras de här värdeorden ofta med uttryck som beskriver hur underbyggda elevens resonemang är.

E	C	A
till viss del underbyggda <i>alternativt</i> rimliga	relativt väl underbyggda	väl underbyggda

Uttrycken används för att ange graden av underbyggnad i elevens argument, slutsatser eller resonemang. Underbyggnad handlar om stöd i fakta och sakförhållanden men också om logiken i resonemanget. Ofta kombineras dessa värdeord med en angivelse av hur utvecklade elevens resonemang är, exempelvis *eleven för enkla och till viss del underbyggda resonemang om...*

E	C	A
beskriver och ger exempel	förklarar och kopplar ihop delar till helheter <i>alternativt</i> förklarar och visar på samband	förklarar och generaliserar <i>alternativt</i> förklarar och visar på generella drag <i>alternativt</i> förklarar och visar på mönster

Uttrycken används för att beskriva kvaliteten på elevens förståelse, till exempel *eleven kan förklara och generalisera kring några centrala naturvetenskapliga upptäckter och deras betydelse för människors levnadsvillkor...* På de högre betygsnivåerna visar eleven en djupare förståelse genom att förklara hur delar hänger ihop och bildar helheter och mönster. Att förklara och generalisera handlar om att utifrån enskildheter och sammanhang kunna dra slutsatser som går att överföra till andra sammanhang. I exemplet ovan kan generaliseringen innebära att eleven använder sina kunskaper om enskilda upptäckter för att dra slutsatser om naturvetenskapens villkor och betydelse.

E	C	A
enkel/enkla <i>alternativt</i> enkelt identifierbara	förhållandevis komplex/komplexa	komplex/komplexa

Uttrycken används vanligen för att beskriva karaktären på de samband eller relationer som eleven kan identifiera och beskriva. Till exempel att *eleven beskriver enkla samband inom och mellan olika samhällsstrukturer*. Enkla samband karaktäriseras av att de är lätta att identifiera och kan beskrivas endast i något led. På de högre betygsstegen visar eleven en mer utvecklad analysförmåga genom att beskriva allt mer komplexa samband eller relationer. Komplexiteten kan då ligga i att relationerna är mindre uppenbara och blir synliga först genom att eleven beskriver samband i flera led, till exempel mellan ekonomiska och politiska strukturer i samhället.

E	C	A
som till viss del för diskussionerna framåt <i>alternativt</i> som i huvudsak hör till ämnet	som för diskussionerna framåt	som för diskussionerna framåt och fördjupar eller breddar dem

Uttrycken används för att beskriva kvaliteten på elevens inlägg och reflektioner i olika sammanhang. Det kan till exempel handla om att *eleven diskuterar på ett sätt som till viss del för diskussionerna framåt...* För högre betygssteg krävs att inläggen är av sådan kvalitet att de för diskussionerna framåt och fördjupar eller breddar dem med till exempel ytterligare fakta eller nya perspektiv.

E	C	A
till viss del anpassat <i>alternativt</i> med viss anpassning	förhållandevis väl anpassat <i>alternativt</i> med förhållandevis god anpassning	väl anpassat <i>alternativt</i> med god anpassning

Uttrycken används för att beskriva hur väl eleven kan anpassa sitt handlande till en situation eller ett sammanhang. Det kan till exempel handla om att anpassa sitt språk eller sin framställning till syftet och målgruppen.

Uttrycken används också för att beskriva hur väl anpassad användningen av till exempel strategier, metoder, verktyg, begrepp eller modeller är till olika situationer. Exempelvis i frasen *eleven kan välja och använda strategier och metoder med viss anpassning till problemets karaktär*. Viss anpassning innebär i exemplet ovan att eleven väljer och använder strategier och metoder med någon tanke om att de ska fungera i den aktuella problemsituationen. På högre betygsnivåer krävs att eleven väljer och använder strategier och metoder som är allt mer effektiva i förhållande till problemet som ska lösas.

E	C	A
i huvudsak fungerande	ändamålsenligt <i>alternativt</i> relativt väl fungerande	ändamålsenligt och effektivt <i>alternativt</i> väl fungerande

Uttrycken används för att ange hur utvecklad elevens förmåga är att bland annat välja, använda och kombinera strategier, metoder, verktyg, begrepp eller modeller. Till exempel i frasen *eleven kan använda handverktyg på ett i huvudsak fungerande sätt och...* För de högre betygen ökar kraven på skicklighet i tillämpningen.

Uttrycken används även för att ange kvaliteten på resultatet, till exempel *kompositioner som har en i huvudsak fungerande form*. I det sammanhanget syns progressionen genom i vilken mån de olika delarna i kompositionen skapar en helhet, hur stor del av kompositionen som fungerar och hur väl den fungerar i sammanhanget.

Uttrycken används också för att ange hur utvecklad elevens förmåga är att använda olika typer av informationskällor, till exempel *eleven använder olika typer av källor på ett i huvudsak fungerande sätt...* På högre betygsnivåer visar eleven en allt mer välfungerande källanvändning genom att på ett medvetet sätt söka information utifrån kunskaper om olika källors möjligheter och begränsningar. När uttrycken används för att ange nivån på elevens förmåga att använda källor kombineras de vanligen med uttryck som anger hur underbyggda resonemang eleven för om informationen och källornas trovärdighet och relevans.

E	C	A
avgränsat	relativt varierat	varierat

I vissa ämnen kombineras uttrycken om hur underbyggda resonemang eleven för om källors trovärdighet och relevans med uttryck som beskriver med vilken variation eleven väljer källor för att söka information. Med ett avgränsat urval avses några få källor. På högre betygsnivåer kan eleven hantera både fler källor och källor av olika slag.

E	C	A
prövar	prövar och omprövar	prövar och omprövar systematiskt

Uttrycken används för att ange med vilken kvalitet eleven prövar något, till exempel hur olika material och hantverkstekniker kan kombineras i skapandet av olika föremål. Att pröva och ompröva innebär ett reflekterande arbetssätt där eleven prövar till exempel olika materialkombinationer för att hitta det uttryck eller den funktion som önskas. På de lägre nivåerna sker prövandet ostrukturerat och sökande. På den högsta nivån sker prövandet på ett mer utvecklat sätt efter någon form av princip eller struktur.

E	C	A
bidrar till att formulera... som leder framåt	formulerar... som efter någon bearbetning leder framåt	formulerar... som leder framåt

Uttrycken används för att ange hur självständigt och med vilken kvalitet eleven kan formulera till exempel handlingsalternativ, modeller eller frågeställningar. Exempelvis *eleven bidrar till att formulera enkla frågeställningar och planeringar som det går att arbeta systematiskt utifrån*. Att eleven "bidrar till att formulera" något innebär att kraven på självständighet är låga. Nästa nivå innebär att eleven klarar av att formulera handlingsalternativ, frågeställningar eller modeller självständigt, men att dessa behöver någon form av bearbetning för att fungera. På den högsta betygsnivån formulerar eleven självständigt handlingsalternativ, modeller och frågeställningar som fungerar utan bearbetning.

E	C	A
viss	relativt god	god

Uttrycken används bland annat för att ange vilken grad av stilkänsla eller språklig variation eleven visar i olika sammanhang, som i frasen *eleven kan skriva olika slags texter med viss språklig variation...* De används också för att beskriva hur förtrogen eleven är med något, som i satsen *dessutom kan eleven med viss säkerhet urskilja och ge exempel på musikaliska karaktärsdrag från olika genrer och kulturer...* Uttrycken kan också användas för att beskriva kvaliteten i elevens användning av ämnesspecifika begrepp, som i formuleringen *eleven kan med god användning av ämnesspecifika begrepp beskriva hur ingående delar samverkar...* I det sammanhanget innebär god användning att eleven använder ämnesspecifika begrepp frekvent och med precision i relevanta sammanhang.

Skolverket

www.skolverket.se

ISBN: 978-91-7559-286-2